数理解析研究所講究録
1127 巻 2000 年 60-66

1次元写像の多重混合性について

日本大学文理学部
森 真(Makoto Mori)

1 序

一次元のexpanding piecewise linear 変換$F: [0,1] \to [0,1]$で，topologically transitiveなものを考える．仮定より，Lebesgue measureに絶対連続な不変確率測度μが存在して，力学系は混合的になる．さらに，BowenおよびOrnsteinの結果を用いれば，力学系はBernoulliになるので，多重混合的である．この事実を用いて，この力学系からBrown 運動に収束する列(例えば，有限次元分布の収束)を構築したい．具体的には$h \in V$ ($\int h\,d\mu = 0$)，Vは後述)について，点列$h(x), h(F(x)), h(F^2(x)), \ldots$からBrown 運動のpathを作ることを考える．それには，特性関数

$$\phi_\lambda(t) = E\left[\exp\left(it\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sum_{k=0}^{\lambda-1} h \circ F^k\right)\right]$$

を評価することが必要になる．それにはこれをテイラー展開して

$$\begin{aligned}\phi_\lambda(t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{it}{\sqrt{\lambda}}\right)^n \int \left(\sum_{k=0}^{\lambda-1} h(F^k(x))\right)^n d\mu \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{it}{\sqrt{\lambda}}\right)^n \sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{\lambda-1} \int h(F^{k_1}(x))\cdots h(F^{k_n}(x))\,d\mu\end{aligned}$$

を考えれば良い．独立確率変数の場合のBerry and Esseenの方法がそのまま適用できれば，上のテイラー展開は3次まで評価すれば良いのだが，我々の列の場合には$h \circ F^k$と$h \circ F^{k+1}$などの相関が強いために，素朴な方法ではそのようなわけにはいかない．したがって，ちょっと変形して

$$\int h_0(x)h_1(F^{k_1}(x))h_2(F^{k_1+k_2}(x))\cdots h_n(F^{k_1+\cdots+k_n}(x))\,d\mu \to \prod_{i=1}^{n}\int h_i\,d\mu$$

の収束のオーダーを評価することが必要になる．本論文では，この評価を行う．

定理 1 Fを$[0,1]$から自分自身への*expanding piecewise linear* 変換で*topologically transitive*なものとし，μで*Lebesgue measure*に絶対連続な不変確率

測度を表す．このとき，$h_0,\ldots,h_n \in V$に対して，ある定数Cが存在して，

$$|\int h_0(x)h_1(F^{k_1}(x))\cdots h_n(F^{k_1+\cdots+k_n}(x))\,d\mu - \prod_{i=1}^{n}\int h_i\,d\mu| < C\lambda^n$$

をみたす．ここで

$$n = \min\{k_1,\ldots,k_n\},$$
$$\lambda^{-1} = \inf\{z \neq 1 \colon \det(I-\Phi(z)) = 0 \ \mathit{or}\ e^{\xi}\},$$
$$\xi = \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\operatorname*{ess\,inf}_{x\in[0,1]}\log|F^{n\prime}(x)|$$

2 準備

$[0,1]$上のpiecewise linearな変換Fに対して有限集合$\mathcal{A}$が存在して，$\{\langle a\rangle\}_{a\in\mathcal{A}}$は$[0,1]$の区間による分割で，$F$はその上で連続で単調とする．このとき

$$\eta_a = |(F|_{\langle a\rangle})'(x)| \quad x \in \langle a\rangle,$$
$$\operatorname{sgn} a = \begin{cases} +1 & \text{if } (F|_{\langle a\rangle})'(x) > 0 \\ -1 & \text{if } (F|_{\langle a\rangle})'(x) < 0 \end{cases}$$

と定める．$\mathcal{A}$の有限列$w = a_1\cdots a_n$はwordと呼ばれ，

1. $|w| = n$,
2. $w[k,l] = a_k\cdots a_l \quad (1 \leq k < l \leq n)$,
3. $w[k] = a_k \quad (1 \leq k \leq n)$,
4. $\langle w\rangle = \cap_{k=0}^{n-1}F^{-k}(\langle a_{k+1}\rangle)$,
5. $\operatorname{sgn} w = \prod_{k=1}^{n}\operatorname{sgn} a_k$,
6. $\eta_w = \prod_{k=1}^{n}\eta_a$

と定める．$\langle w\rangle \neq \emptyset$をみたすword wをadmissibleとよび，admissibleなword全体を$\mathcal{W}$で表す．便宜上，empty word ϵは$\mathcal{W}$に属するものとし，

1. $|\epsilon| = 0$,
2. $\langle\epsilon\rangle = [0,1]$,

と定める．$\mathcal{A}$の元の無限列$\alpha = a_1a_2\cdots$についても，$\alpha[k] = a_k$などと定める．

$x \in [0,1]$について，xの展開$a_1^x a_2^x\cdots$は$F^n(x) \in \langle a_{n+1}^x\rangle$によって定める．また，word $w \in \mathcal{W}$に対して，

$$w^+ = \lim_{y\uparrow x_1} a_1^y a_2^y\cdots,$$
$$w^- = \lim_{y\downarrow x_2} a_1^y a_2^y\cdots$$

と定める，ここで$x_1 = \sup\{x \in \langle w \rangle\}, x_2 = \inf\{x \in \langle w \rangle\}$を表す．さらに

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{a^\sigma : a \in \mathcal{A}, \sigma = +, -\}$$
$$\tilde{\mathcal{W}} = \{a^\sigma : w \in \mathcal{W}, \sigma = +, -\}$$

とおく．一般の区間Jについても同様にJ^+, J^-を定義するさらに，点$x \in [0,1]$に対しても

$$x^+ = \lim_{y \uparrow x} a_1^y a_2^y \cdots,$$
$$x^- = \lim_{y \downarrow x} a_1^y a_2^y \cdots$$

と定める．$\tilde{S} = \{x^\sigma : x \in [0,1], \sigma = +, -\}$とおく．$\tilde{S}$の元は，混乱しない場合には$[0,1]$の点と同一視する．

θで$\mathcal{W}$，$\tilde{\mathcal{W}}$または$\tilde{S}$上のshift operatorを表す．また，記号として

$$x <_\sigma y = \begin{cases} x < y & \text{if } \sigma = +, \\ x > y & \text{if } \sigma = -, \end{cases}$$
$$\delta[L] = \begin{cases} 1 & \text{if the statement } L \text{ is true,} \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$
$$1_J(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in J, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

と定める．2つの列$\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \tilde{S}$について，$\tilde{\alpha} < \tilde{\beta}$であるとは，以下のうちの1つが成立することとする．

1. ある$x \in [0,1]$が存在して，$\tilde{\alpha} = x^+$かつ$\tilde{\beta} = x^-$，
2. あるkが存在して，$\tilde{\alpha}[1,k] = \tilde{\beta}[1,k]$，かつ

$$\tilde{\alpha}[k+1] <_{\operatorname{sgn} \tilde{\alpha}[1,k]} \tilde{\beta}[k+1]$$

3 空間と作用素

$\tilde{S}$からCへの関数で

1. $\sup_{\tilde{\alpha} \in \tilde{S}} |f(\tilde{\alpha})| < \infty$,
2. xが$\langle a \rangle$ $(a \in \mathcal{A})$の内点ならば，$f(x^+) = -f(x^-)$
3. $\displaystyle\lim_{\substack{y \to x \\ y \in \langle x[1] \rangle}} f(y^\sigma) = f(x^\sigma) \quad (\sigma \in \{+,-\})$

をみたすもの全体を次の同値関係

$$f \sim g \text{ とは } f(x^+) + f(x^-) = g(x^+) + g(x^-) \text{ が成立すること}$$

で割ったものを考え，その部分集合で，$(0 < r < 1 \text{ or } r = \infty)$について，$||f||_r < \infty$ をみたすもの全体をB_rとおく．ここで

$$||f||_r = \sup_{w \in \mathcal{W}} r^{-|w|} |f(w^+) + f(w^-)| \quad (0 < r < 1)$$
$$||f||_\infty = \inf_{g \sim f} \{ \sup_{x \in [0,1]} |g(x)| \}$$

である．さらに$B = (\cup_{0<r<1} B_r) \cap B_\infty$とおく．

また，$[0,1]$からCへの関数hについて

$$||h||_r = \inf \sum_w |C_w| r^{|w|} \quad (0 < r < 1)$$
$$||h||_\infty < \infty$$

とおく．ここで上の式のinfはhのwordの定義関数による分割全体についてとるものとする．Vで$0 < r < 1$と$r = \infty$について$||h||_r < \infty$をみたす関数全体を表す．

補題 1 Vはノルム達$(||\cdot||_r, 0 < r < 1 \textit{ and } r = \infty)$によって，*locally convex space*になり，完備である．

補題 2 $h_1, h_2 \in V$ならば，$h_1 h_2 \in V$

いずれも証明は難しくない．また，上の定義から，$f \in B$は

$$f(h) = \sum_w C_w (f(w^+) + f(w^-)) \qquad (h = \sum_w C_w 1_{\langle w \rangle})$$

とおくことで，VからCへの関数とみなすことができる．

補題 3 任意の区間$J \subset \langle w \rangle$ $(w \in \mathcal{W})$と$0 < r < 1$について

$$r^{-|w|} |f(1_J)| \le (\#\mathcal{A} - 1) ||f||_r / (1 - r)$$

4 母関数

以上で準備が終ったので，多重混合性について考えよう．これには母関数

$$\tilde{s}(J_0, \dots, J_p : t_1, \dots, t_p)$$
$$= \sum_{q=1}^{p} \sum_{k_q=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{p} t_j^{k_j} \int 1_{J_0}(x) 1_{J_1}(F^{k_1}(x)) \cdots 1_{J_p}(F^{k_1 + \cdots + k_p}(x))\, dx.$$

を考えれば良い．しかし，これを用いてrenewal equationを作るには端点の軌道を同時に追わねばならないので，signed symbolic dynamicsを用いる．そ

こで$\tilde{\alpha} \in \tilde{S}$について,

$$
\begin{aligned}
&s(\tilde{\alpha}|J_1, \ldots, J_p : t_1, \ldots, t_p) \\
&= \sum_{q=1}^{p} \sum_{k_q=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{p} t_j^{k_j} \int \sum_{|w|=k_1} \eta_w \delta[(wx)[1] = \tilde{\alpha}[1], \exists \theta wx] \\
&\quad \times \left\{ \delta[wx <_{\epsilon(\tilde{\alpha})} \tilde{\alpha}] - \frac{1}{2} \right\} 1_{J_1}(x) \cdots 1_{J_p}(F^{k_2+\cdots+k_p}(x))\, dx.
\end{aligned}
$$

とおく．とくに$p = 0$のとき

$$
\begin{aligned}
s(\alpha) &= \int \delta[x[1] = \tilde{\alpha}[1]] \left\{ \delta[x <_{\epsilon(\tilde{\alpha})} \tilde{\alpha}] - \frac{1}{2} \right\} dx \\
&= \int_{\langle \tilde{\alpha}[1] \rangle} \left\{ \delta[x <_{\epsilon(\tilde{\alpha})} \tilde{\alpha}] - \frac{1}{2} \right\} dx
\end{aligned}
$$

が成り立つことに注意しよう.

定理 2 *(1)* $J_0 \subset \langle a \rangle$ $(a \in \mathcal{A})$ について,

$$
\tilde{s}(J_0, J_1, \ldots, J_p : t_1, \ldots, t_p) = \sum_{\sigma \in \{+,-\}} s(J_0^{\sigma}|J_1, \ldots, J_p : t_1, \ldots, t_p)
$$

(2) とくに $p = 0$ かつ $J_0 \subset \langle a \rangle$ $(a \in \mathcal{A})$ のとき

$$
s(J_0^+) + s(J_0^-) = |J_0|
$$

ここで，$|J_0|$ は区間J_0の*Lebesgue*測度を表す.

この定理は1次元写像のPerron–Frobenius 作用素を求めるときに用いた方法と全く同様に示せる([5], [6])．多重混合性のオーダーを求めるには$\tilde{s}(J_0, J_1, \ldots, J_p : t_1, \ldots, t_p)$ の特異点, すなわち上の定理を用いれば, $s(J_0^{\sigma}|J_1, \ldots, J_p : t_1, \ldots, t_p)$ の特異点を求めれば良い．ここで次の作用素を定義しよう.

$$
\begin{aligned}
&\chi(\tilde{\alpha}|J^{\sigma} : t)f = \sum_{l=0}^{\infty} \delta[J \subset \langle \tilde{\alpha}[l+1] \rangle] \left\{ \delta[J^{\sigma} <_{\epsilon(\tilde{\alpha})} \theta^l \tilde{\alpha}] - \frac{1}{2} \right\} \\
&\qquad \times \operatorname{sgn} \tilde{\alpha}[1, l] \eta_{\tilde{\alpha}[1,l]} t^l f(J^{\sigma}), \\
&I(\tilde{\alpha}|J : t)f = \sum_{l=0}^{\infty} \delta[\theta^l \tilde{\alpha} \in J] \operatorname{sgn} \tilde{\alpha}[1, l] \eta_{\tilde{\alpha}[1,l]} t^l f(\theta^l \tilde{\alpha}), \\
&\chi(\tilde{\alpha}|J : t)f = \chi(\tilde{\alpha}|J^+ : t)f + \chi(\tilde{\alpha}|J^- : t)f + I(\tilde{\alpha}|J : t)f, \\
&\phi^{\tilde{\alpha}}(\tilde{b} : t) = \epsilon(\tilde{\alpha}) \sum_{l=1}^{\infty} \operatorname{sgn} \tilde{\alpha}[1, l] \eta_{\tilde{\alpha}[1,l]} \left\{ \delta[\tilde{b} < \theta^l \tilde{\alpha}] - \frac{1}{2} \right\} t^l, \\
&\Phi(\tilde{\alpha}|t)f = \sum_{\tilde{b} \in \tilde{\mathcal{A}}} \phi^{\tilde{\alpha}}(\tilde{b} : t) f(\tilde{b}), \\
&\Psi(\tilde{\alpha}|J : t)f = [\chi(\tilde{\alpha}|J : t) + \Phi(\tilde{\alpha}|t)(I - \Phi(t))^{-1} \chi(J : t)]f
\end{aligned}
$$

ここで，$f \in B$，Jは区間，$\tilde{\alpha} \in \tilde{S}$，$t \in C$，$\sigma \in \{+,-\}$である．ここで，$\Phi$の定義を考えると，$\Psi$の定義における$(I-\Phi(t))^{-1}$は$\tilde{A} \times \tilde{A}$行列とみなすことができる．renewal equation を構成することで次の定理を得る．

定理 3

$$s(\tilde{\alpha}|J_1,\ldots,J_p:t_1,\ldots,t_p) = \Psi(\tilde{\alpha}|J_1:t_1)\cdots\Psi(J_p:t_p)s$$

$s(\tilde{\alpha}|J_1,\ldots,J_p:t_1,\ldots,t_p)$たちを$B$の元とみて，補題3，4 を用いることで，$h_0,h_1,\ldots,h_p \in V$について，

$$\sum_{k_1,\ldots,k_p} t_1^{k_1}\cdots t_p^{k_p} \int h_0(x)h_1(F^{k_1}(x))\cdots h_p(F^{k_1+\cdots+k_p}(x))\,dx$$

の特異点が$|t_i| < e^{\xi}$では$\det(I-\Phi(t_i))$の零点であることがわかる．とくに$t_i = 1$は零点であるが，ここでの留数は不変測度に対応する．以上をまとめれば，定理 1 の証明を得る．

参考文献

[1] V.Baladi and G.Keller, Zeta functions and transfer operators for piecewise monotone transformations, Commun. Math. Phys., vol. 127 (1990), 459–478.

[2] F.Hofbauer and G.Keller, Zeta functions and transfer–operators for piecewise linear transformations, J.Reine Angew. Math., vol. 352 (1984), 100–113.

[3] G.Keller, Ergodicité et mesures invariantes pour les transformations dilatantes par morceaux d'une région bornée du plan, C.R. Acad. Sc. Paris, vol. 289, (1979), 625–627.

[4] A.Lasota and J.A.Yorke, On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 186 (1973), 481–488.

[5] M.Mori, Fredholm determinant for piecewise linear transformations, Osaka J. Math., vol. 27 (1990), 81–116.

[6] M.Mori, Fredholm determinant for piecewise monotonic transformations, Osaka J. Math., vol. 29 (1992), 497–529.

[7] M.Mori, Fredholm determinant for piecewise linear transformations on a plane, Tokyo J. Math., vol. 21 (1998), 477-510.

[8] M.Mori, Zeta function and Perron–Frobenius Operator of Piecewise linear transformations on R^k, Tokyo J. Math., vol. 18 (1995), 401–416.